



## O ESTUDO DA GEOMETRIA UTILIZADA PELAS ABELHAS COMO APLICAÇÃO DOS CONCEITOS DE ÁREA, PERÍMETRO E VOLUME COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA 3D

*Ane Stefany Batista Mendes, Matheus Gomes Santos, Jullie Anne Carvalho Borges, Raíssa Domingas Lopes Fonseca, Ana Ester Dos Santos, Sinara Ramony Fonseca Ramos, Edson Crisostomo Dos Santos*

### INTRODUÇÃO

O trabalho em questão visa a construção de uma atividade de geometria que envolve cálculo de perímetro, área, volume e formas geométricas e sua aplicabilidade na construção dos alvéolos das colmeias das abelhas. Como recurso optou-se por trabalhar com o software GeoGebra em suas versões 2D e 3D. O tema a ser trabalhado teve como motivação o trabalho desenvolvido por alunos da USP em 2001. A atividade que se segue, propõe o estudo dos conceitos de área e volume instigando a curiosidade a respeito da forma em que as abelhas constroem suas colmeias com uma impressionante precisão matemática instintiva e, usando o GeoGebra, para melhorar a visualização e compreensão da razão pela qual o formato geométrico dos alvéolos das colmeias seja hexagonal. Nesse sentido, faremos a construção de colmeias em cubos de dimensões  $6,06 \text{ um}$  (unidade de medida), no qual serão construídos alvéolos em formatos de prisma de bases hexagonal, triangular, quadrada e pentagonal, bem como em formato cilíndrico. Usaremos para todos os alvéolos a área  $2,598076211 \text{ um}$  para a base.

### OBJETIVO

O objetivo principal deste trabalho é explorar os conceitos de geometria de maneira contextualizada usando o software GeoGebra versão 5.0 para resolver a atividade proposta.

### DESENVOLVIMENTO

A Geometria é uma área da Matemática na qual encontramos aplicabilidade em muitas situações do nosso cotidiano. Buscamos uma situação da natureza onde a mesma se encontra presente. A escolha de se trabalhar com a forma dos alvéolos das colmeias foi exatamente para podermos envolver a relação entre o seu formato hexagonal e os cálculos de área e volume que também nos ajudarão a mostrar o razão deste formato.

O problema central desta atividade pode ser enunciado da seguinte maneira: Porque o formato hexagonal para a construção dos alvéolos das colmeias? Para responder a essa pergunta, faremos a construção de colmeias com alvéolos de bases hexagonal, quadrada, triangular, pentagonal e circular. Sabemos que a colmeia deve ser composta de alvéolos com formato de maneira que o mesmo associe uma maior capacidade de armazenar mel e exija menos cera para ser construído. A partir disso, vamos tomar como base para o início de nossos cálculos alvéolos de forma hexagonal (já que o mesmo escolhido pelas abelhas supõe-se atender estas exigências) tendo  $1 \text{ um}$  de aresta. Vamos utilizar para todas as construções geométricas as áreas das bases iguais e mesmas alturas, garantindo assim que os volumes desses sólidos sejam iguais pelo Princípio de Cavallieri.

Neste trabalho, por questão de espaço, exemplificamos apenas a construção dos prismas de base hexagonal realizada por meio do GeoGebra 5.0. Os processos das demais construções são análogos. Trabalharemos com um cubo de dimensões  $6,06 \text{ um}$ , pois como estamos utilizando o prisma de base hexagonal regular como base, conseguimos construir dentro desse cubo nove prismas de base hexagonal regular de altura  $6,06 \text{ um}$ . Por termos hexágonos de  $1 \text{ um}$  de aresta da base. Logo segue construção no GeoGebra:

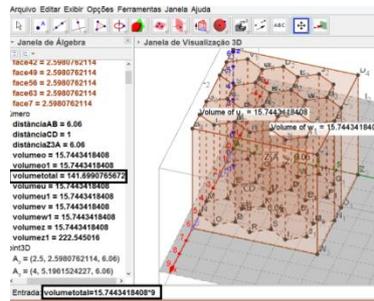


Figura 1: Colmeia com alvéolo de base hexagonal.

A partir das construções, calculamos o volume total dos alvéolos construídos, devemos multiplicar o total de alvéolos pelo volume de um alvéolo. Individualmente, todos os alvéolos comportam a mesma quantidade de mel, pois possuem a base de mesma área e mesma altura, logo possuem o mesmo volume. Entretanto, podemos perceber que as formas geométricas que melhor aproveitam o espaço, ou seja, proporcionam um maior armazenamento de mel por terem o volume total maior, são os alvéolos de bases hexagonais, triangulares e quadrados. Sendo assim, porque então o formato hexagonal foi escolhido pelas abelhas? A resposta para este questionamento está relacionada às condições impostas inicialmente, quais sejam: além de armazenar maior volume de mel, o formato escolhido deve exigir uma menor quantidade de cera para ser construído, ou seja, é necessário otimizar ser processo construtivo.

Para analisarmos qual das formas (triangular, quadrada, ou hexagonal) exige menor quantidade de cera para ser construída, iremos analisar o perímetro das bases dos alvéolos. Como temos que triângulos, quadrados e hexágonos, se encaixam perfeitamente ao uni-los (no sentido de uma pavimentação), podemos então notar que ao unirmos as demais formas estudadas neste trabalho haverá espaços entre elas, e também estas formas compartilharão um menor número de arestas umas com as outras tendo assim um maior gasto de cera na fabricação dos alvéolos das colmeias. Logo, por uma questão lógica, as melhores opções de construção dos alvéolos até então, seriam os prismas de bases hexagonais, quadradas e triangulares, pois o perímetro dos mesmos é equivalente ao gasto para o preenchimento com cera, como veremos na tabela 1. Para as formas geométricas em que há arestas não compartilhadas iremos adicionar no preenchimento com cera uma aresta duplicada. Vamos calcular agora os perímetros e a o preenchimento com cera das formas para cada alvéolo.

$P_{hexágono} = 6 * a = 6$  e  $P_C hexágono = 6$ ;  $P = Perímetro$  ;  $P_C = Preenchimento com cera$ .  
 $P_{quadrado} = 4 * a = 6,447419592$  e  $P_C quadrado = 6,447419592$   
 $P_{triângulo} = 3 * a = 7,348469229$  e  $P_C triângulo = 7,348469229$   
 $P_{pentágono} = 5 * a = 6,144286545$  e  $P_C pentágono = 8,602001163$   
 $P_{círculo} = 2\pi r = 5,713876838$  e  $P_C círculo = 11,42775368$

Tabela 1: Relação entre o perímetro da base dos alvéolos e o preenchimento dos alvéolos com cera

Forma Geométrica.	Perímetro de cada alvéolo.	Preenchimento com cera de cada alvéolo.	Variação entre os consumos de cera, em relação ao hexágono, de cada alvéolo.
Hexágono	06	06	0%
Quadrado	6,447419592	6,447419592	7,46%
Triângulo	7,348469229	7,348469229	22,47%
Pentágono	6,144286545	8,602001163	43,36%
Círculo	5,713876838	11,42775368	90,46%

Como visto na tabela 1, o hexágono tem um consumo de cera menor em relação às outras formas, assim é mais econômico para as abelhas a construção dos alvéolos neste formato. Dessa maneira, associando economia de cera e capacidade maior de armazenar mel, o formato mais indicado para a construção dos alvéolos é de fato o hexagonal.



FÓRUM ENSINO • PESQUISA  
EXTENSÃO • GESTÃO  
**FEPEG**  
UNIVERSIDADE: SABERES E PRÁTICAS INOVADORAS

Trabalhos científicos • Apresentações artísticas e culturais • Debates • Minicursos e Palestras

REALIZAÇÃO:  
Unimontes  
Universidade Estadual de Montes Claros

APOIO:  
FAPEMIG  
FADENOR

**24 a 27  
setembro**  
Campus Universitário Professor Darcy Ribeiro

www.fepeg.unimontes.br

## CONCLUSÃO

Relacionar o conteúdo a uma aplicação do mesmo é de extrema importância no processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos diversos níveis de ensino. Consideramos que mesmo que o estudante nunca tenha visto concretamente uma colmeia de abelhas, espera-se que ele já tenha ouvido falar da mesma ou então tenha tido a oportunidade de visualizá-la por meio da internet. Analisar o porquê de instintivamente as abelhas construírem os alvéolos da colmeia no formato hexagonal, é uma maneira de contribuir para que os estudantes possam desenvolver uma melhor compreensão dos conceitos geométricos envolvidos nessa construção e da modelagem matemática realizada para essa finalidade.

Mas ainda segundo a revista virtual Super Interessante, as abelhas chamam a atenção na construção dos alvéolos por mais um motivo: O problema realmente interessante acontece no fechamento dos alvéolos. Em vez de construir um hexágono (plano) para cobrir o fundo, as abelhas economizam cerca de um alvéolo em cada cinquenta, utilizando três losangos iguais colocados inclinadamente. Pode parecer pouco, mas a economia de 2 por cento que elas conseguem com o fechamento de milhões de alvéolos representa uma grande quantidade. Este aspecto não foi abordado neste trabalho, porém é de grande relevância para a justificativa da Geometria usada pelas abelhas na construção dos alvéolos, e vale a pena ser citado após a execução da atividade de construção e, possivelmente poderá contribuir com a ampliação deste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARCO, Luiz. **A Geometria instintiva das abelhas**. Super Interessante; Disponível em: < <http://super.abril.com.br/mundo-animal/geometria-instintiva-abelhas-439742.shtml>>. Acesso em: 01 de julho de 2014.

MARTINS, José Augusto Ramiro; DORIA; Eduardo Cavalheiro; CALABRÓ; Maria Cristina Salgueiro; ZAGATTI, Ricardo Venâncio. **Abelhas: A Matemática dos alvéolos Um problema prático de Geometria**. Universidade de São Paulo (USP). São Paulo, 2001. Disponível em: <[http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-1-matematica\\_abelhas.pdf](http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-1-matematica_abelhas.pdf)>. Acesso em: 01 de julho de 2014.